ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

ΣΥΖΥΓΙΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$

- Αν $r \in \mathbb{R}$, τότε ο συζυγής του, $\bar{r}$, είναι ο ίδιος ο r
- Αν $z = a + bi \in \mathbb{C}$, τότε $\bar{z} = a - bi$
- Αν $u = a + bi + cj + dk$, τότε $\bar{u} = a - bi - cj - dk$, στον $\mathbb{H}$.

Γνωρίζουμε ότι $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
και $u \cdot \bar{u} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Επομένως με την βοήθεια των παραπάνω στον δ.χ. $\mathbb{K}^n$ ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο $\langle -, - \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$
Έστω $(u_1, \dots, u_n)$ και $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$, τότε
$\langle (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \rangle = u_1 \bar{v_1} + u_2 \bar{v_2} + \dots + u_n \bar{v_n}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

i) $x, y, z \in \mathbb{K}^n$ $\quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
$\quad \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

ii) Αν $x, y \in \mathbb{K}^n$ και $a \in \mathbb{K}$, τότε
$\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$ και $\langle x, ay \rangle = \langle x, y \rangle \bar{a}$

iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ και είναι 0, αν-ν $x = \bar{0}$

$\mathbb{C}$: $\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(c+di)}\,\overline{(a+bi)}$

$$= \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} = ac - bd - (ad+bc)i$$

$\overline{(a+bi)}\,\overline{(c+di)} = (a-bi)(c-di) = ac-bd-(ad+bc)i$

Επομένως, $\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(a+bi)}\,\overline{(c+di)}$

$\mathbb{H}$ ∘ $\overline{(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)} =$

$aa' + ab'i + ac'j + ad'k + ba'i - bb' + bc'ij + bd'ik +$
$ca'j + cb'ji - cc' + cd'jk + da'k + db'ki + dc'kj - dd' =$

$\overline{(aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-dc')i+(ac'-ca'+db'-d'b)j+(ad'+da'+bc'-cd')k}$

$= (aa'-bb'-cc'-dd')-(ab'+ba'+cd'-dc')i-(ac'-ca'+db'-d'b)j-(ad'+da'+bc'-cb')k \neq \overline{(a+bi+cj+dk)}\,\overline{(a'+b'i+c'j+d'k)}$

$\overline{(a'+b'i+c'j+d'k)}\,\overline{(a+bi+cj+dk)} = (a'-b'i-c'j-d'k)(a-bi-cj-dk)$
$(aa'-b'b-c'c-d'd)+(-a'b-ab'+c'd-cd')i+(\quad)j+(\quad)k$

Επομένως, $u,v\in\mathbb{H}$, τότε $\overline{uv}=\bar{v}\cdot\bar{u}\neq\bar{u}\bar{v}$ (*)

$\langle x, ay\rangle = \langle x,y\rangle\bar{a}$
$x=(u_1,\dots,u_n)$
$y=(v_1,\dots,v_n)$

Αν ήταν στο $\mathbb{K}$, $\langle x, ay\rangle = \bar{a}\langle x,y\rangle$

$\langle (u_1,\dots,u_n),(av_1,\dots,av_n)\rangle =$
$u_1\overline{av_1}+u_2\overline{av_2}+\dots+u_n\overline{av_n} \overset{(*)}{=}$
$u_1\bar{v}_1\bar{a}+u_2\bar{v}_2\bar{a}+\dots+u_n\bar{v}_n\bar{a} =$
$(u_1\bar{v}_1+\dots+u_n\bar{v}_n)\bar{a} = \langle x,y\rangle\bar{a}$

Λήμμα

Αν $x,y\in\mathbb{H}^n$ και $\langle x,y\rangle=0$ $\forall y\in\mathbb{H}^n$, τότε $x=\bar{0}$
↑ συγκεκριμένο

Αν $\langle x,y\rangle=0 \ \forall x\in\mathbb{R}^n$, τότε $y=0$
συγκεκριμένο

Απόδειξη
Έστω $x=(a_1,\dots,a_n)$, $y=e_1=(1,0,\dots,0)$

$$\left.\begin{array}{l}\langle x,e_1\rangle=a_1\cdot 1=0\\ a_1\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow a_1=0$$

Λόγω ισχύει σε [illegible] [illegible] να το [illegible] να [illegible] της βάσης

Αναλογικά, και $e_2,\dots,e_n$

Ορισμός
Το μήκος του $x\in\mathbb{R}^n$ ορίζεται από $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$
- $d(x,y)=\|x-y\|$

Υπενθύμιση
Με A^t συμβολίζουμε τον ανάστροφο του πίνακα A.
Με $\bar{A}^t$ συμβολίζουμε τον συζυγή του ανάστροφου.

Πρόταση
Αν $x,y\in\mathbb{K}^n$ και $A\in M_n(\mathbb{K})$, τότε ισχύει
$\langle xA,y\rangle=\langle x,y\bar{A}^t\rangle$

Απόδειξη
Αρκεί να ισχύει για όλα τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\langle e_iA,e_j\rangle=\langle A(i),e_j\rangle=a_{i1}0+\dots+a_{ij}1+0+\dots+a_{in}0$
↑ η i-γραμμή του A.

Επομένως, $\langle e_iA,e_j\rangle=a_{ij}$.

$\langle e_i,e_j\bar{A}^t\rangle$
$e_j\bar{A}^t=j$-γραμμή του $\bar{A}^t=j$-στήλη του $\bar{A}$

Επομένως, $\langle e_i, e_j \bar{A}^t \rangle = \langle e_i, j\text{-στήλη του } \bar{A} \rangle = 1(\overline{\bar{a}_{ij}}) = a_{ij}$
$\hookrightarrow (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$

Ορισμός
Με $O(n,\mathbb{K})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο $\{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \langle xA, yA \rangle = \langle x,y \rangle$ για όλα τα $x,y \in \mathbb{K}^n\}$

Το σύνολο αυτό καλείται η n-οστή ορθογώνια ομάδα πάνω από το $\mathbb{K}$

Πρόταση
$O(n,\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$

Απόδειξη
Έστω $A, B \in O(n,\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in O(n,\mathbb{K})$;

$\langle x,y \rangle = \langle xA, yA \rangle = \langle xAB, yAB \rangle \Rightarrow AB \in O(n,\mathbb{K})$.

$I_n \in O(n,\mathbb{K}) \neq \emptyset$. $\forall A \in O(n,\mathbb{K}) \Rightarrow A^{-1} \in O(n,\mathbb{K})$;

$\langle x,y \rangle = \langle xA, yA \rangle \ \forall x,y \in \mathbb{K}^n$ ← Δείχνουμε ότι $\exists A^{-1}$
$x = e_i, y = e_j$.

$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Επομένως, $\langle e_i, e_j \rangle = \langle e_iA, e_jA \rangle = \langle i\text{-γραμμή του } A, j\text{-γραμμή} \rangle$

Άρα οι γραμμές του A, είναι κάθετες μεταξύ τους και ορθοκανονικές και άρα αποτελούν ορθοκανονική βάση.

$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \langle e_iA, e_jA \rangle = \langle e_i, e_j \underbrace{A\bar{A}^t}_{\text{πρέπει } = I} \rangle \Rightarrow A\bar{A}^t = I \Rightarrow$

$\bar{A}^t = A^{-1}$

Από πρόταση $\langle xA, y\rangle = \langle x, y\bar{A}^t\rangle$ —— Θ.δ.ο. $A^{-1} \in O(n, \mathbb{K})$

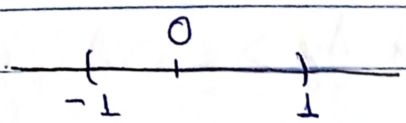
$\langle x, y\rangle = \langle x\bar{A}^t, y\bar{A}^t\rangle = \langle x, y\bar{A}^t(\bar{A}^t)^t\rangle =$

$\langle x, y\bar{A}^t A\rangle = \langle x, y\rangle$ · Άρα $A^{-1} \in O(n, \mathbb{K})$

Ορισμός

- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ τότε η ομάδα $O(n, \mathbb{R})$ καλείται ορθογώνια ομάδα και γράφουμε $O(n)$
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, τότε η ομάδα $O(n, \mathbb{C})$ καλείται ορθομοναδιαία ομάδα (unitary) και γράφουμε $U(n)$
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, τότε η ομάδα $O(n, \mathbb{H})$ καλείται συμπλεκτική ομάδα (symplectic) και γράφουμε $Sp(n)$

▶ $n = 1$ • $O(1) = \{\pm 1\} = S^0 \subseteq \mathbb{R}^1$



$(a)(\bar{a}^t) = (1)$

$aa = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

• $U(1) = S^1 = \{z \mid \|z\| = 1$ ή $z = a + bi \rightsquigarrow a^2 + b^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$(z)(\bar{z}) = 1 \Leftrightarrow \|z\| = 1$ (μοναδιαίος κύκλος)

• $Sp(1) = S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$

$u \in \mathbb{H}$ $u = a + bi + cj + dk$

$u\bar{u}^t = u\bar{u} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$

Είναι οι ΜΟΝΑΔΙΚΕΣ σφαίρες που είναι ομάδες

από την S^4 και πάνω δεν είναι ομάδες

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

1) $A \in O(n, \mathbb{K}) \Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow$ οι γραμμές του (ή οι στήλες του) αποτελούν ορθοκανονική βάση $\Leftrightarrow$ απεικονίζει ορθοκανονική βάση σε ορθοκανονική βάση

ΠΡΟΤΑΣΗ

$A \in O(n, \mathbb{K})$ αν-ν $\|Ax\| = \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{K}^n$ Δηλαδή, διατηρεί τα μήκη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$A \in O(n, \mathbb{K}) \Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle xA, yA \rangle$

Έστω ότι ο A διατηρεί τα μήκη $\Leftrightarrow \langle xA, xA \rangle = \langle x, x \rangle$ $\forall x \in \mathbb{K}^n$

Θέλουμε ν.δ.ο. $\langle xA, yA \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y$.

$\langle (x+y)A, (x+y)A \rangle = \langle x+y, x+y \rangle \overset{(\Sigma)}{=} \langle x+y, x \rangle + \langle x+y, y \rangle =$

$\langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle =$

$\langle xA, xA \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle yA, yA \rangle$

$\langle (x+y)A, (x+y)A \rangle = \langle xA + yA, xA + yA \rangle =$

$\langle xA, xA \rangle + \langle xA, yA \rangle + \langle yA, xA \rangle + \langle yA, yA \rangle$

Από (Σ) έχουμε $\cancel{\langle xA, xA \rangle} + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle yA, yA \rangle =$
$\cancel{\langle xA, xA \rangle} + \langle xA, yA \rangle + \langle yA, xA \rangle + \langle yA, yA \rangle \Leftrightarrow$

$\langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle = \langle xA, yA \rangle + \langle yA, xA \rangle$ $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$

Για $x = e_i$ και $y = e_j$, έχουμε το ζητούμενο.

$\langle e_i A, e_j A \rangle = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

2) $A\bar{A}^t = I \Rightarrow \det(A\bar{A}^t) = 1 \Rightarrow \det A \det \bar{A}^t = 1 \Rightarrow \det A \det \bar{A} = 1 \Rightarrow$
$(\det A)\overline{\det A} = 1 \Rightarrow \|\det A\| = 1$

Άρα $\det A = \pm 1$, επομένως:

ΟΡΙΣΜΟΣ
Η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(n)$, είναι όλοι οι πραγματικοί ορθογώνιοι πίνακες με ορίζουσα 1.

Αντίστοιχα, ορίζεται η ειδική ορθομοναδιαία ομάδα $SU(n)$.
Θα την ορίσουμε παρακάτω

Και τέλος αντίστοιχα ορίζεται η ειδική συμπλεκτική ομάδα.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Εάν $O(2) - SO(2) = \{A \text{ με } \det A = -1\}$

π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2) - SO(2)$

$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$

Δηλαδή η $U(1)$ και η $SO(2)$ είναι η ίδια ομάδα

Όλες οι στροφές $\simeq S^1 = U(1)$

π.χ. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ομάδα}}}{\Sigma_3} \simeq Gl_2(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{πίνακες}}}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Υπάρχει ισομορφισμός $\varphi: Sp(1) \to SU(2)$

Γνωρίζουμε $Sp(1) = S^3$, άρα $S^3 = SU(2)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε ορίσει την $y: M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$

$y(A) = (\varphi(a_{ij}))$

$$\varphi(a+bi+cj+dk) = \begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

Η φ είναι 1-1 και διατηρεί το γινόμενο.

Πρέπει $\varphi(a+bi+cj+dk) \in SU(2)$ όταν $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, και επίσης, είναι επί.

Αν

$$A = \begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} = \varphi(a+bi+cj+dk), \text{ πρέπει } A\bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-bi & c+di \\ -c+di & a+bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \in U(2)$, πρέπει επίσης $\det A = 1$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$$

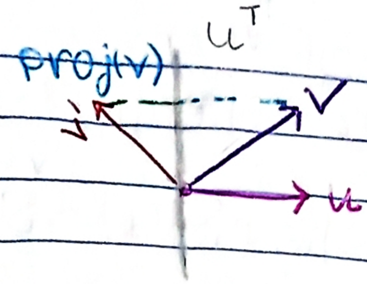
~~Ψάχνω να δω αν είναι επί.~~

Έστω ένας πίνακας $B \in SU(2)$, όπου $B = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ Άσκηση

$z_1\bar{z_3} + z_2\bar{z_4} = 0$ κ' $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$

Να βρεθεί ένα στοιχείο $u \in Sp(1)$ ώστε $\varphi(u) = B \in SU(2)$

συμπλήρωμα του v



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (για ανακλάσεις)

$\mathbb{R}^n \ni u$ με $\|u\| = 1$

$V(u) = \{tu \mid t \in \mathbb{R}\}$ $\dim V(u) = 1$

$u^{\perp} = V(u)^{\perp}$: ο ορθογώνιος υπόχωρος του $V(u) = \{v : v \in \mathbb{R}^n$ με $\langle v, u \rangle = 0\}$

$\dim V(u)^{\perp} = n - 1 \Rightarrow V(u)^{\perp}$ ονομάζεται υπερεπίπεδο.

Υπερεπίπεδο ονομάζεται ένας υπόχωρος, ο οποίος έχει διάσταση, όσο ο χώρος πλην ένα.

proj(v): η προβολή του v στον $u^{\perp}$

$\text{proj}(v) + tu = v$. Επομένως, $\text{proj} = v - tu$.

$\langle \text{proj}(v), u \rangle = 0 \Rightarrow \langle v - tu, u \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, u \rangle - t\langle u, u \rangle = 0$

Άρα $t = \langle v, u \rangle$

Επομένως, $\text{proj}(v) = v - \langle v, u \rangle u$ (Είναι G-S)

Με v' συμβολίζουμε το συμμετρικό του v, ως προς το υπερεπίπεδο $u^{\perp}$. Δηλαδή, έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \varphi(v) =$ συμμετρικό του v.

$v' = \varphi(v) = \text{proj}(v) + (-\langle v, u \rangle) u = v - \langle v, u \rangle u - \langle v, u \rangle u =$

$v - 2\langle v, u \rangle u$